CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1985

•

CONCOURS SCIENCES

CALCUL NUMERIQUE

Durée : 2 heures

Vendredi 3 mai 1985 de 14 heures à 16 heures

•

Le candidat est invité à préciser les moyens de calcul qu'il utilise (règle ou cercle à calcul, tables numériques, calculette avec ou sans fonctions mathématiques, programmable ou non), en indiquant la précision que lui procurent ces outils. Les calculs seront présentés dans des tableaux clairs où figureront tous les résultats intermédiaires.

– I –

Soit A une matrice carrée d'ordre 4 dont le terme général A_i^j (où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne) vérifie la propriété suivante :

$$(P) \qquad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \Longrightarrow A_i^j = A_j^i = A_{5-i}^{5-j} \ .$$

Posons :

$$(R) \quad \begin{cases} s_1 = A_1^1 + A_1^4 \ , \ s_2 = A_1^2 + A_1^3 \ , \ s_3 = A_2^2 + A_2^3 \ , \ s_4 = A_1^1 + A_2^2 \ , \ s_5 = A_1^4 + A_2^3 \ ; \\ p_1 = 2A_1^1 A_1^4 \ , \ p_2 = 2A_1^2 A_1^3 \ , \ p_3 = 2A_2^2 A_2^3 \ ; \\ q_l = s_l^2 - p_l \qquad \text{pour} \quad l = 1, 2 \text{ et } 3 \ . \end{cases}$$

a) Montrer que les six nombres A_i^j qui interviennent dans les relations (R) caractérisent totalement la matrice A .

b) Montrer que la matrice $B = A^2$ vérifie la propriété (P) .

c) Expliciter les éléments B_i^j de cette matrice en fonction des nombres s_l, p_l et q_l définis par les relations (R) et des deux nombres A_1^2 et A_1^3 ; en déduire un algorithme permettant de calculer les six éléments distincts de B en fonction de ceux de A en faisant aussi peu de produits que possible.

d) Dénombrer les additions ou soustractions d'une part, et les produits d'autre part, que nécessitent respectivement l'algorithme courant et celui qui a été proposé en (*c*).

– II –

Considérons la matrice C d'ordre 4 dont le terme général est défini par :

$$C_i^j = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad |i-j| \leqslant 1 \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $M(k)$ la suite des matrices définies par :

$$\begin{cases} M(0) = C \\ M(k) = \left(M(k-1)\right)^2 \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Le terme général de la matrice $M(k)$ sera noté $M_i^j(k)$, tandis que $t_j(k)$ représentera la norme enclidienne de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M(k)$:

$$t_j(k) = \left[\sum_{i=1}^{4} \left(M_i^j(k) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Enfin on désignera par $N(k)$ la matrice dont le terme général se déduit de celui de $M(k)$ par :

$$N_i^j(k) = \frac{M_i^j(k)}{t_j(k)} \qquad \text{pour} \quad i, j \text{ prenant toutes valeurs dans l'ensemble } \{1, 2, 3 \text{ et } 4\} .$$

a) Construire la matrice C, contrôler qu'elle satisfait la propriété (P) et en déduire que $M(k)$ vérifie cette propriété pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Peut-on en dire autant des matrices $N(k)$?

b) Calculer $M(k)$ pour $k = 1, 2$ et 3 .

c) Calculer $N(k)$ pour $k = 2$ et 3 .

– III –

Le candidat admettra l'existence d'un vecteur V dont les composantes V_i vérifient :

$$V_i = \lim_{k \to \infty} N_i^j(k) \qquad \text{pour} \quad i, j \text{ prenant toutes valeurs dans l'ensemble } \{1, 2, 3 \text{ et } 4\} .$$

a) Donner une approximation aussi précise que possible de ce vecteur V .

b) Contrôler que V est un vecteur propre de C associé à une valeur propre λ dont on précisera la valeur.